M. de la Vallée Poussin fait la communication suivante *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques* :

« 1. La détermination de la valeur moyenne des fonctions numériques est d'une grande importance dans la théorie des nombres. On trouvera un exposé très intéressant des principales recherches sur cette question dans l'*Analytische Zahlentheorie* de M. P. Bachmann.

On doit signaler parmi les problèmes qui se résolvent de la manière la plus satisfaisante, celui qui a pour objet de trouver la valeur moyenne de la fonction $T(n)$, ce symbole désignant le nombre des diviseurs de n. Ce problème revient à déterminer la valeur asymptotique du rapport

$$\frac{T(1) + T(2) + \cdots + T(n)}{n},$$

quand n croît indéfiniment, ou encore la valeur asymptotique de la fonction

$$\tau(n) = T(1) + T(2) + \cdots + T(n). \tag{1}$$

On trouve d'abord que $\tau(n)$ peut se mettre sous la forme

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right], \tag{2}$$

en désignant par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x.

L'exactitude de la formule (2) se vérifie immédiatement, car, si n passe de la valeur $(n-1)$ à la valeur n, la somme du second nombre augmente du nombre des diviseurs de n. En raisonnant sur la formule (2), on trouve pour $\tau(n)$ l'expression asymptotique

$$\tau(n) = n \log n + (2C - 1)n + O(\sqrt{n}) \tag{3}$$

où C désigne la constante d'Euler, et $O(\sqrt{n})$ un terme complémentaire de l'ordre de $\sqrt{n}$ seulement. Ce degré peu élevé du terme complémentaire est ce que cette formule présente de plus remarquable.

2. Nous nous proposons d'abord dans cette note de généraliser la méthode qui conduit au résultat précédent et nous allons chercher à déterminer la moyenne arithmétique de la fonction $T(n, b)$ qui désigne combien il y a de diviseurs de n qui sont d'une

forme linéaire donnée $ax + b$. Nous serons conduits à une formule analogue à la formule (3) avec un terme complémentaire du même ordre. Nous supposerons dans ce qui suit que a est $< b$.

Posons, par analogie avec (2),

$$\tau(n, b) = \mathrm{T}(1, b) + \mathrm{T}(2, b) + \cdots + \mathrm{T}(n, b); \tag{4}$$

on aura aussi

$$\tau(n, b) = \sum_{k=o}^{\frac{n-b}{a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right], \tag{5}$$

car, si n passe de la valeur $(n-1)$ à la valeur n, le second membre augmente d'autant d'unités que n possède de diviseurs de la forme $ak + b$.

L'étude de la somme (5) repose sur une transformation générale que nous allons faire connaître. Pour cela, désignons par Σ_x^y une somme où k prend toutes les valeurs $> x$ et $\leqq y$ et soit p un entier $< n$. On peut écrire

$$\sum_{\frac{n-pb}{ap}}^{\frac{n-b}{a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right] = \sum_{\frac{n-2b}{2a}}^{\frac{n-b}{a}} + \sum_{\frac{n-3b}{3a}}^{\frac{n-2b}{2a}} + \sum_{\frac{n-4b}{4a}}^{\frac{n-3b}{3a}} + \cdots + \sum_{\frac{n-pb}{pa}}^{\frac{n-\overline{p-1}\,b}{\overline{p-1}\,a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right].$$

Mais on a, en général,

$$\sum_{\frac{n-bp}{pa}}^{\frac{n-\overline{p-1}\,b}{\overline{p-1}\,a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right] = (p-1)\left\{\left[\frac{n-\overline{p-1}\,b}{\overline{p-1}\,a}\right] - \left[\frac{n-pb}{pa}\right]\right\}$$

de sorte qu'en faisant la substitution analogue dans chaque terme du second membre de la formule précédente et réduisant, il vient

$$\sum_{\frac{n-bp}{ap}}^{\frac{n-b}{a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right] = \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{n-kb}{ka}\right] - (p-1)\left[\frac{n-pb}{pa}\right]. \tag{6}$$

Ajoutons aux deux membres $\sum_{k=o}^{\frac{n-bp}{ap}} \left[\frac{n}{ak+b}\right]$, nous aurons

$$(7)\quad \tau(n,b) = \sum_{k=o}^{\frac{n-b}{a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right] = \sum_{k=o}^{\frac{n-\overline{p-1}b}{\overline{p-1}a}} \left[\frac{n}{ak+b}\right] + \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{n-kb}{ka}\right] - (p-1)\left[\frac{n-pb}{pa}\right].$$

Faisons dans cette formule $p = [\sqrt{n}]$ et désignons par $O(\sqrt{n})$ un terme dont le rapport à $\sqrt{n}$ reste fini, on aura évidemment

$$\tau(n, b) = \frac{n}{a} \sum_{k=o}^{\frac{\sqrt{n}}{a}} \frac{1}{k+\frac{b}{a}} + \frac{n}{a} \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k} - \frac{n}{a} + O(\sqrt{n}).$$

Mais on a avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{k=o}^{\frac{\sqrt{n}}{a}} \frac{1}{k+\frac{b}{a}} = \log \frac{\sqrt{n}}{a} - \frac{\Gamma' \frac{b}{a}}{\Gamma \frac{b}{a}}, \quad \sum_{1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k} = \log \sqrt{n} + C.$$

Par conséquent, en substituant,

$$(8)\quad \tau(n, b) = \frac{n}{a}\left[\log \frac{n}{a} + C - 1 - \frac{\Gamma' \frac{b}{a}}{\Gamma \frac{b}{a}}\right] + O(\sqrt{n}),$$

cette formule résout la question que nous nous étions proposée.

3. On déduit de cette formule une conséquence assez curieuse. Désignons par $r(ak+b)$ la partie fractionnaire du quotient de n par $(ak+b)$ de telle sorte qu'on aura

$$\left[\frac{n}{ak+b}\right] = \frac{n}{ak+b} - r(ak+b)$$

La formule (5) donnera

$$(9) \qquad \tau(n, b) = \frac{n}{a} \sum_{k=o}^{\frac{n-b}{a}} \frac{1}{k + \frac{b}{a}} - \sum_{k=o}^{\frac{n-b}{a}} r(ak + b).$$

Mais on a, avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\sum_{k=o}^{\frac{n-b}{a}} \frac{1}{k + \frac{b}{a}} = \log \frac{n}{a} - \frac{\Gamma' \frac{b}{a}}{\Gamma \frac{b}{a}};$$

de sorte que la comparaison des formules (8) et (9) donne

$$\sum_{k=o}^{\frac{n-b}{a}} r(ak + b) = \frac{n}{a}(1 - C) + O(\sqrt{n}).$$

Le nombre des fractions r est $\frac{n}{a}$, on a donc le théorème suivant :

Si l'on divise n *par tous les nombres plus petits de la forme linéaire* ak + b, *la moyenne arithmétique des parties fractionnaires de ces quotients aura pour valeur asymptotique* (1 — C), n *augmentant indéfiniment. Ce résultat est donc indépendant du choix de la forme* (ak + b) *et il est le même que dans le cas où l'on divise* n *par tous les nombres plus petits.*

4. Je vais terminer par un théorème qui établit un rapprochement très remarquable :

Si l'on divise n *par tous les nombres premiers qui lui sont inférieurs, la moyenne arithmétique des parties fractionnaires de ces quotients aura pour limite ce même nombre* 1 — C *quand* n *augmentera indéfiniment.*

Pour établir ce théorème, je partirai de l'identité bien connue

$$\sum_{p \overline{<} n} lp \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots \right) = \sum_{k \overline{<} o} lk$$

où la somme du premier nombre s'étend aux nombres premiers p seulement et celle du second membre à tous les entiers.

Désignons par $r(p)$ la partie fractionnaire du quotient de n par p, par ϵ une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; on voit de suite que l'équation précédente divisée par n peut s'écrire

$$\sum_{p \overline{<} n} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{n} \sum_{p \overline{<} n} lp\, r(p) = \frac{1}{n} \sum_{k \overline{<} n} lk + \epsilon = ln - 1 + \epsilon.$$

D'autre part, j'ai démontré dans mon Mémoire sur la théorie des nombres premiers (1re partie, no 57) que l'on a

$$\sum_{p \overline{<} n} \frac{lp}{p-1} = ln - C + \epsilon.$$

On conclut de la comparaison de ces deux équations

$$\frac{1}{n} \sum_{p<n} lp\, r(p) = 1 - C + \epsilon.$$

Comme le nombre des nombres premiers $< n$ a pour valeur asymptotique $\frac{n}{ln}$, la valeur moyenne des fractions $r(p)$ sera pour n infiniment grand

$$\frac{ln}{n} \sum_{p<n} r(p)$$

et je dis que cette quantité sera, comme la précédente, égale à $(1 - C)$. En effet, leur différence

$$\frac{ln}{n} \sum_{p<n} r(p) - \frac{1}{n} \sum lp\, r(p)$$

est positive et inférieure à la quantité

$$\frac{1}{n} \sum_{p<n} (ln - lp),$$

qui tend vers zéro comme je vais le montrer. Le nombre des termes de cette somme a pour expression asymptotique $(1 + \epsilon) \frac{n}{ln}$

et d'autre part, $\sum_{p<n} lp = (1 + \epsilon')\, n$, comme je l'ai montré dans le mémoire déjà cité; on a donc

$$\frac{1}{n} \sum_{p<n} (ln - lp) = \frac{1}{n} \left[(1 + \epsilon) \frac{n}{ln}\, ln - (1 + \epsilon')\, n \right] = \epsilon - \epsilon'$$

et l'on voit que cette quantité tend vers zero avec ϵ et ϵ'. Le théorème est donc démontré. „

Jeudi 21 avril 1898. Un échange d'idées sur des questions d'enseignement se fait entre les membres présents. A ce propos, M. Goedseels formule, contre les géométries non euclidiennes, quelques objections auxquelles répond M. Mansion.